



## Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a IX-a

Barem de notare și evaluare

Se acordă 10 puncte din oficiu

### Problema 1.

(22 de puncte)

Arătați că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$  și orice numere reale  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , are loc inegalitatea

$[x_1]^2 + [x_2]^2 + \dots + [x_n]^2 + 3n > 2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ .

*Gazeta Matematică 11/2025 (Supliment)*

### Soluție:

Vom folosi relațiile:  $x_i = [x_i] + \{x_i\}$  și  $0 \leq \{x_i\} < 1$ , oricare ar fi  $x_i \in \mathbb{R}$  și  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ..... 3p

Inegalitatea de demonstrat devine:  $([x_1]^2 - 2[x_1] + 1) + \dots + ([x_n]^2 - 2[x_n] + 1) > 2(\{x_1\} + \dots + \{x_n\}) - 2n$  .....6p

Se obține (1)  $([x_1] - 1)^2 + \dots + ([x_n] - 1)^2 > 2(\{x_1\} - 1) + \dots + 2(\{x_n\} - 1)$  .....9p

Relația (1) este adevărată întrucât  $([x_i] - 1)^2 \geq 0$ , iar  $\{x_i\} - 1 < 0$ , pentru orice  $x_i \in \mathbb{R}$  și  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  ...4p

### Problema 2.

(23 de puncte)

Se consideră un triunghi  $ABC$  în care punctele  $D, E$  și  $F$  sunt mijloacele laturilor  $BC, AC$ , respectiv  $AB$ . Dacă  $M$  este un punct oarecare în planul triunghiului, demonstrați că paralela prin  $D$  la dreapta  $MA$ , paralela prin  $E$  la dreapta  $MB$  și paralela prin  $F$  la dreapta  $MC$  sunt trei drepte concurente.

### Soluție :

Pentru un punct  $O$  arbitrar fixat în plan, vom identifica un punct  $P$  astfel încât  $DP \parallel MA, EP \parallel MB$  și  $FP \parallel MC$  sau echivalent.....4p

$$DP \parallel MA \Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = x \cdot \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OP} = x \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = -x \cdot \overrightarrow{OM} + x \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC} \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$EP \parallel MB \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = -y \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC} \dots\dots\dots 3p$$

$$FP \parallel MC \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = -z \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}, \text{ unde } x, y, z \in \mathbb{R}^* \dots\dots\dots 3p$$

Alegând  $x = y = z = \frac{1}{2}$ , rezultă că  $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OM} + \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{OG}$ , astfel că existența punctului de concurență,  $P$ , este asigurată.....10p

**Observație:** Se deduce că  $\overrightarrow{MG} = 2 \cdot \overrightarrow{GP}$ , deci punctele  $M, G, P$  sunt coliniare și  $MG = 2GP$ .

### Problema 3.

(23 de puncte)

Să se demonstreze inegalitățile:

a)  $\frac{x}{y+z} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right)$ , oricare ar fi  $x, y, z \in (0, \infty)$ .

b)  $\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$ , oricare ar fi  $a, b, c \in (0, \infty)$ .

### Soluție:

a)  $\frac{x}{y+z} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) \Leftrightarrow x \cdot (y-z)^2 \geq 0 \dots\dots\dots 6p$

b) Folosind punctul anterior, deducem că:  $\frac{2a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{a}{bc} \right)$ ,  $\frac{2b}{b^2+ca} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{b} + \frac{b}{ca} \right)$  și

$$\frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} + \frac{c}{ab} \right) \dots\dots\dots 6p$$

Adunând relațiile anterioare rezultă:  $\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \right) (1)$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \Leftrightarrow ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 (2) \dots\dots\dots 4p$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă cerința.....3p

### Problema 4.

(22 de puncte)

a) Dacă  $x$  și  $y$  sunt numere naturale nenule astfel încât  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ , demonstrați că  $x = y$ .

b) Determinați numerele naturale nenule  $a, b, c$  știind că  $a < b < c$  și  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ .



c) Fie  $n$  număr natural,  $n \geq 3$ . Demonstrați că există numerele naturale nenule  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

astfel încât  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$ .

### Soluție:

a)  $x = y = 2$  .....4p

b)  $a = 1$  nu convine. Dacă  $a \geq 3$ , rezultă că  $b \geq 4, c \geq 5$  și  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{47}{60}$ , nu convine.

Pentru  $a = 2$ , rezultă că  $b = 3, c = 6$  .....6p

c) Pentru  $n = 3$ , am găsit la punctul anterior tripletul  $a_1 = 2, a_2 = 3$  și  $a_3 = 6$ .

Inductiv, admitând că pentru  $n = k$ , avem  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  și  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$ , construim pentru

$n = k + 1$  numerele naturale  $x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1}$ , astfel : înmulțim cu  $\frac{1}{2}$  egalitatea  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1$

și, ulterior, adunăm  $\frac{1}{2}$  egalității nou obținute. Va rezulta  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \dots + \frac{1}{2a_k} = 1$ , deci

$x_1 = 2, x_2 = 2a_1, \dots, x_{k+1} = 2a_k$  sunt numerele căutate.....12p

### Notă

Orice rezolvare corectă, diferită de barem, va primi punctajul corespunzător.